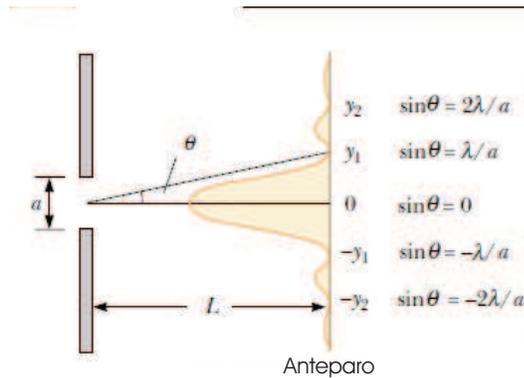
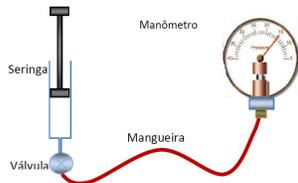


# FÍSICA EXPERIMENTAL III/XIX



LABORATÓRIO DIDÁTICO



**INSTITUTO DE FÍSICA**  
Universidade Federal Fluminense

Niterói/RJ - BRASIL  
ABRIL DE 2013.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Princípio de Arquimedes</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>Ondas Estacionárias em Cordas</b>	<b>14</b>
1.1	Objetivo . . . . .	3	6.1	Objetivo . . . . .	14
1.2	Material utilizado . . . . .	3	6.2	Material utilizado . . . . .	14
1.3	Teoria . . . . .	3	6.3	Teoria . . . . .	14
1.4	Procedimento experimental . . .	3	6.4	Procedimento experimental . . .	14
1.4.1	Utilizando um dinamômetro . . . . .	3	6.5	Folha de manipulação - Ondas Estacionárias . . . . .	15
1.4.2	Utilizando uma balança . . . . .	3	<b>7</b>	<b>Velocidade do Som Usando o Tubo de Kundt</b>	<b>16</b>
1.5	Folha de manipulação - Arquimedes . . . . .	4	7.1	Objetivo . . . . .	16
1.5.1	Dados Experimentais . . . . .	4	7.2	Material utilizado . . . . .	16
1.5.2	Análise dos Dados Experimentais . . . . .	4	7.3	Teoria . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Flutuação</b>	<b>5</b>	7.4	Folha de manipulação : Velocidade do Som usando um Tubo de Kundt. . . . .	17
2.1	Objetivo . . . . .	5	7.5	Procedimento experimental . . .	17
2.2	Material utilizado . . . . .	5	<b>8</b>	<b>Reflexão e refração da luz</b>	<b>18</b>
2.3	Procedimento . . . . .	5	8.1	Objetivo . . . . .	18
2.4	Teoria . . . . .	5	8.2	Material utilizado . . . . .	18
2.5	Folha de manipulação - Flutuação . . . . .	6	8.3	Teoria . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Experiências Demonstrativas: Equação de Bernoulli</b>	<b>7</b>	8.4	Procedimento experimental - Leis da Reflexão e Refração . . .	19
3.1	Objetivo . . . . .	7	<b>9</b>	<b>Interferência e Difração</b>	<b>21</b>
3.2	Material utilizado . . . . .	7	9.1	Objetivo . . . . .	21
3.3	Teoria . . . . .	7	9.2	Material utilizado . . . . .	21
3.4	Procedimento experimental: Equação de Bernoulli . . . . .	7	9.3	Teoria . . . . .	21
3.5	Folha de Manipulação : Equação de Bernoulli . . . . .	8	9.4	Procedimento Experimental: Interferência e Difração . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Transformação de um gás a Temperatura Constante</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>APÊNDICE I: Propagação de Erros</b>	<b>25</b>
4.1	Objetivo . . . . .	9	10.1	Algarismos Significativos . . . . .	25
4.2	Material utilizado . . . . .	9	10.2	Notação científica . . . . .	25
4.3	Teoria . . . . .	9	10.3	Transformações de unidades . . .	25
4.4	Procedimento experimental . . .	9	10.4	Arredondamentos . . . . .	25
4.5	Folha de Manipulação : Transformação de um gás a Temperatura Constante . . . . .	10	10.5	Operações com algarismos significativos . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Equivalente Mecânico da Caloria</b>	<b>11</b>	10.5.1	Adição e Subtração . . . . .	26
5.1	Objetivo . . . . .	11	10.5.2	Multiplicação e divisão . . . . .	26
5.2	Material utilizado . . . . .	11	10.5.3	Funções transcendentais . . . . .	26
5.3	Teoria . . . . .	11	10.6	Introdução à Teoria de Erros . . .	26
5.4	Procedimento experimental : Equival. Mec. da Caloria . . . . .	13	10.7	Incerteza (ou erro) . . . . .	26
			10.8	Classificação dos erros . . . . .	26
			10.9	Estimativa de incertezas . . . . .	27
			10.10	Propagação de erros . . . . .	28

<b>11 APÊNDICE II: Método dos</b>	
<b>Mínimos Quadrados</b>	<b>29</b>
11.1 Construção de gráficos . . . . .	29
11.2 Análise de gráficos: ajuste linear	30

# 1 Princípio de Arquimedes

## 1.1 Objetivo

Determinar experimentalmente o empuxo de um fluido sobre um objeto submerso e usar o princípio de Arquimedes para obter a densidade de um sólido.

## 1.2 Material utilizado

- Bequer;
- Dinamômetro;
- Paquímetro;
- Balança;
- Cilindros metálicos;
- Corpo sólido com forma irregular.

## 1.3 Teoria

Consideremos fluidos em repouso, ou seja, em equilíbrio hidrostático. Nessas condições, o *princípio de Arquimedes* estabelece que quando um corpo é total ou parcialmente mergulhado no fluido (líquido ou gás), ele recebe do fluido uma força de empuxo de mesma intensidade mas oposta ao peso da porção de fluido que deslocada pelo corpo. Assim, sabendo que o módulo  $E$  da força de empuxo é igual ao módulo do peso  $P_f$  do fluido deslocado, podemos escrever

$$E = P_f = \rho_f V_f g,$$

onde  $\rho_f$  é a densidade do fluido,  $V_f$  é o volume de fluido deslocado e  $g$  é a aceleração da gravidade.

## 1.4 Procedimento experimental

Neste experimento o empuxo será determinado utilizando dois procedimentos experimentais diferentes.

### 1.4.1 Utilizando um dinamômetro

Neste primeiro procedimento, serão realizadas duas medidas de força com a utilização de um dinamômetro (veja a Figura 1). Primeiramente, mede-se o peso de um corpo, como mostra a Figura 1.(a). A seguir, determina-se o peso aparente do objeto, após este estar *totalmente* submerso em água. A diferença entre essas duas medidas é o empuxo exercido sobre o objeto.

**Atenção :** Não deixe a parte interior do dinamômetro molhar.

### 1.4.2 Utilizando uma balança

Inicialmente determina-se, com a utilização de uma balança, a massa de um bequer contendo água, conforme mostra a Figura 2.(a). A seguir, determina-se a massa aparente do béquer com água ao mergulhar totalmente um objeto nele, como mostra a Figura 2.(b). As massas obtidas podem ser utilizadas para determinar o peso real e o peso aparente do béquer com água, cuja diferença é igual ao empuxo.

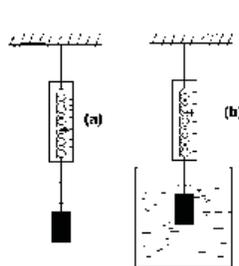


Figura 1

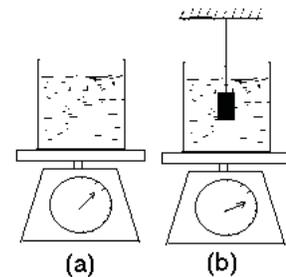


Figura 2

Obs: A condução do experimento será feita de acordo com os passos listados na folha de manipulação .

## 1.5 Folha de manipulação - Arquimedes

Data: ..... Turma:.....

Grupo

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

### 1.5.1 Dados Experimentais

**Atenção :** Não esqueça de estimar as incertezas de suas medidas e de identificar as unidades das grandezas físicas.

1. Utilizando um dinamômetro, meça o peso  $P$  do cilindro de alumínio. Em seguida, coloque o cilindro de alumínio preso ao dinamômetro e mergulhe o cilindro totalmente na água. Meça novamente o peso do cilindro (agora peso aparente  $P_{ap}$ ).

**Atenção :** Não deixe a parte interior do dinamômetro molhar!

$$P = \dots \pm \dots$$

$$P_{ap} = \dots \pm \dots$$

2. Meça, utilizando uma balança, a massa  $M$  do bequer com água. A seguir coloque o cilindro de alumínio suspenso e totalmente imerso na água e meça a massa aparente  $M_{ap}$  do bequer.

$$M = \dots \pm \dots$$

$$M_{ap} = \dots \pm \dots$$

3. Utilizando o paquímetro, meça a altura e o diâmetro do cilindro utilizado no procedimento anterior.

$$h = \dots \pm \dots$$

$$d = \dots \pm \dots$$

### 1.5.2 Análise dos Dados Experimentais

**Atenção :** Não esqueça da propagação de erros.

1. Conhecendo o peso dos cilindros dentro e fora da água, calcule o empuxo  $E_1$  no cilindro de alumínio.

$$E_1 = \dots \pm \dots$$

2. Obtenha uma expressão teórica que relaciona  $M_{ap} - M$  e o empuxo. Obtenha então o valor experimental  $E_2$  do empuxo utilizando este método.

$$E_2 = \dots \pm \dots$$

3. Obtenha o volume do cilindro e calcule o empuxo utilizando a expressão obtida na seção 'Teoria'. Adote a aceleração da gravidade como  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  e tome a densidade da água como  $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3 (= 10^3 \text{ kg/m}^3)$ .

$$V = \dots \pm \dots$$

$$E_3 = \dots \pm \dots$$

4. Se ao invés de alumínio fosse utilizado um material diferente, mas conservando a mesma geometria, o resultado seria diferente? Justifique.

5. Compare os valores de  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ . Os resultados concordam dentro das margens de incerteza dos experimentos?

6. (a) Agora que você verificou a validade da expressão teórica para o empuxo, utilize-a junto com a técnica experimental acima mais precisa para determinar o volume de um objeto de geometria irregular. (b) Meça a massa do objeto; (c) obtenha então sua densidade.

$$V_O = \dots \pm \dots$$

$$M_O = \dots \pm \dots$$

$$\rho_O = \dots \pm \dots$$

## 2 Flutuação

### 2.1 Objetivo

Analisar experimentalmente a flutuação de um corpo um líquido, medindo a densidade do líquido.

### 2.2 Material utilizado

- Bequer de 1000 ml;
- copo cilíndrico de PVC;
- copo com areia e copinho de café;
- Paquímetro;
- balança.

### 2.3 Procedimento

Nosso objetivo é relacionar experimentalmente a altura submersa  $h$  com a massa  $m$  de um corpo flutuante cilíndrico, conforme a Figura 1. A variação da massa do corpo cilíndrico é feita colocando diferentes quantidades de areia no seu interior (cilindro de PVC), o qual é colocado a flutuar em água em um bequer de 1000 ml.

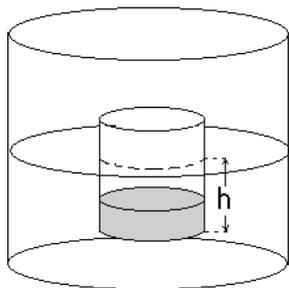


Figura 1: Cilindro com areia flutuando em água, com profundidade mergulhada igual a  $h$ .

É importante observar que o equilíbrio do cilindro é imprescindível para realizar medidas precisas da altura submersa  $h$ . O equilíbrio, com o eixo do cilindro na posição vertical, deverá ser obtido por meio da distribuição mais uniforme possível da areia no fundo deste corpo flutuante.

### 2.4 Teoria

Para discutirmos teoricamente o sistema da Figura 1, precisamos considerar dois fatos fundamentais:

1. O corpo flutuante está em equilíbrio, portanto a força resultante é nula.
2. São duas as forças agindo sobre o corpo flutuante: o peso e o empuxo.

**Desenvolvimento:** Sabendo que o módulo da força peso deverá ser igual ao módulo do empuxo, obtem-se, utilizando o Princípio de Arquimedes, uma relação entre a altura submersa  $h$  e a massa  $m$  do corpo flutuante:

$$h = \frac{1}{\rho_{Liq}A}m,$$

onde  $\rho_{Liq}$  é a densidade do líquido).

## 2.5 Folha de manipulação - Flutuação

Data: ..... Turma:.....  
 Grupo  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....

1. Acrescente pouco a pouco areia no interior do copo cilíndrico, colocando-o para flutuar em um béquer contendo água, medindo a cada vez a massa total  $m$  do corpo flutuante e a altura submersa  $h$ . Preencha a Tabela 1 abaixo.
2. Usando um paquímetro, meça o diâmetro externo do cilindro de PVC:

$$d = \dots \pm \dots$$

3. A partir do diâmetro externo, determine a área  $A$  de seção transversal do cilindro.

$$A = \dots \pm \dots$$

4. Construa em um papel milimetrado o gráfico  $h$  vs.  $m$ .
5. (a) Pela forma do gráfico obtido, que relação existe entre  $h$  e  $m$ ? (b) Expresse essa relação matematicamente.

6. Utilizando a lei do empuxo para corpos flutuantes, demonstre que, para um corpo de seção reta constante de área  $A$  (como é o caso do copo de areia), vale a relação

$$h = \frac{1}{\rho_{Liq}A}m,$$

onde  $\rho_{Liq}$  é a densidade do líquido.

7. Utilizando o método dos mínimos quadrados (MMQ) – veja, se necessário, o apêndice II – obtenha a reta que melhor ajusta a estes dados ( $Y' = a + bX$ ). Em seguida, trace essa reta no gráfico.
8. Determine, a partir do coeficiente angular  $b$  obtido via MMQ, a densidade da água:

$$\rho_{agua} = \dots \pm \dots$$

Compare o resultado para  $\rho_{agua}$  com o valor  $1 \text{ g/cm}^3$ . Eles concordam dentro da margem de incerteza para  $\rho_{agua}$ ?

9. Suponha que se substitua a água por outro líquido de menor densidade. A reta que seria obtida teria menor ou maior inclinação que a da água? Justifique.

Tabela 1: Dados experimentais de  $h$  e  $m$ .

$i$	$m$ (g)	$h$ (cm)	$X^2$	$XY$	$a + b \times X$	$\Delta Y^2$
1						
2						
3						$a = \dots \pm \dots$
4						
5						$b = \dots \pm \dots$
6						
$\Sigma_{i=1}^N$						

### 3 Experiências Demonstrativas: Equação de Bernoulli

#### EXPERIÊNCIA I

##### 3.1 Objetivo

Verificar experimentalmente a validade da equação de Bernoulli.

##### 3.2 Material utilizado

Uma garrafa PET cilíndrica sem tampa e com um furo lateral, uma régua, água e uma cuba.

##### 3.3 Teoria

Na figura abaixo é mostrada a montagem experimental utilizada, ou seja, uma garrafa PET modificada, com furo lateral por onde flui a água.

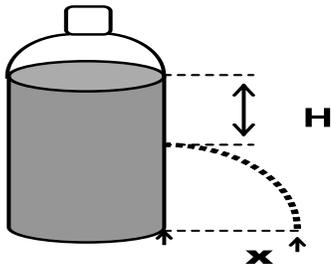


Figura 2: Esquema experimental da experiência I.

O alcance horizontal  $X$  do jato de água parabólico pode ser medido em nível abaixo do fundo da garrafa, com o auxílio de uma régua horizontal. O valor de  $X$  é proporcional à velocidade horizontal  $v$  do jato de água ao sair da garrafa, como em um movimento de lançamento de projéteis. Mais precisamente:

$$X^2 = \frac{2Y}{g}v^2, \quad (1)$$

onde  $Y$  é o desnível entre o furo e a régua.

Usando a equação de Bernoulli, temos:

$$p_0 + \rho gH = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gH_0, \quad (2)$$

quando aplicada a dois pontos, um no nível superior da água (lado esquerdo da equação) e o outro na saída do jato (lado direito da equação), onde  $\rho$  é a densidade da água e  $p_0$  é a pressão atmosférica. Observe que tomamos o cuidado adicional de introduzir uma pressão extra  $\rho gH_0$  desconhecida no lado direito da equação 2. Esta representa a resistência oferecida pelo pequeno furo na garrafa à passagem da água, devido a tensão superficial.  $H_0$  é um parâmetro a ser determinado.

Juntando as duas equações, temos:

$$X^2 = 4Y(H - H_0). \quad (3)$$

##### 3.4 Procedimento experimental: Equação de Bernoulli

1. Meça sucessivos valores de  $H$  enquanto a água flui através da garrafa, e os respectivos valores  $X$ . Repita as medidas pelo menos três vezes.
2. Construa o gráfico de  $X^2$  versus  $H$ , que deve resultar em uma reta (o que comprova experimentalmente a validade da equação de Bernoulli). Determine através do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) os valores dos coeficientes linear e angular da reta que melhor se ajusta ao dados experimentais. Determine os valores de  $Y$  e  $H_0$  usando o MMQ.
3. Compare o valor de  $H_0$  como valor da altura da pequena coluna de água restante na garrafa, após todo escoamento, acima do nível do furo. O que você pode dizer sobre isso?

### 3.5 Folha de Manipulação : Equação de Bernoulli

Data: ..... Turma:.....

Grupo

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

Tabela 2: Dados Exp. de  $H$  vs  $X^2$ .

$X \pm \Delta X$	$X^2 \pm \Delta X^2$	$H \pm \Delta H$

Observe a experiência realizada no laboratório e, com base nos resultados experimentais, discuta a validade das propriedades (a), (b) e (c) acima consideradas para o sistemas.

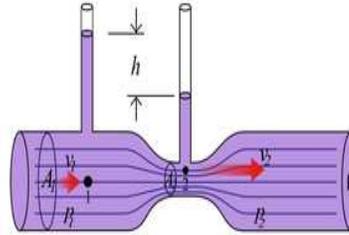


Figura 3: Ilustração do medido de Venturi.

### EXPERIÊNCIA II: Medidor de Venturi

A Figura abaixo mostra um medidor de Venturi que é um instrumento usado para medir a velocidade de escoamento de um fluido em um tubo. Visando uma abordagem teórica mais simples desse sistema normalmente são feitas as seguintes considerações :

- (a) Escoamento estacionário;
- (b) Fluido incompressível;
- (c) Atrito interno desprezível;

## 4 Transformação de um gás a Temperatura Constante

### 4.1 Objetivo

Estudar o comportamento de um gás variando o volume e pressão, mantendo-se constante sua temperatura.

### 4.2 Material utilizado

- Manômetro;
- Seringa com escala em mililitros (ml).

### 4.3 Teoria

Boyle e Mariotte estudaram o comportamento estático de gases submetidos a variações de pressão e volume, mantendo suas temperaturas constantes. Suas conclusões formam a bem conhecida Lei de Boyle-Mariotte: *sob temperatura constante, o volume ocupado por uma certa massa de gás é inversamente proporcional à pressão a qual o gás está submetido*, isto é, o produto da pressão com o volume em qualquer estado do gás é uma constante,  $pV = cte$ ,

onde  $p$  e  $V$  são, respectivamente, a pressão à qual o gás está submetido e o seu volume. Se representarmos por índices 1, 2, 3, ...,  $n$ , os estados do gás, tem-se:

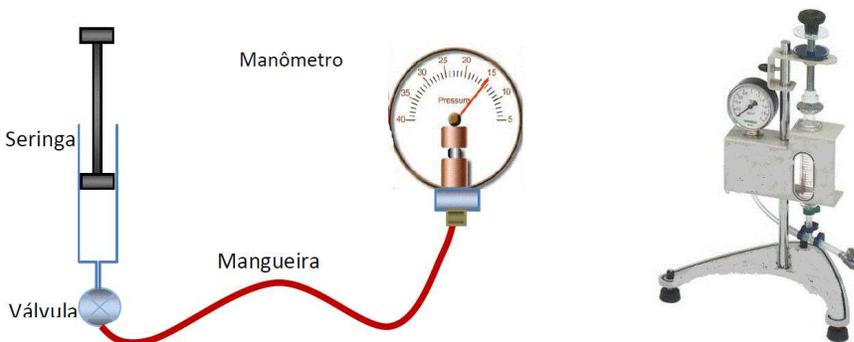
$$p_1V_1 = p_2V_2 = p_3V_3 = \dots = p_nV_n = cte \quad (4)$$

A relação acima é válida rigorosamente para gases ideais, mas como devemos provar nesta experiência, pode ser usada com uma aproximação para gases reais, como é o caso do ar nas condições de temperatura e pressão do laboratório

### 4.4 Procedimento experimental

O gás utilizado nesse procedimento experimental será o ar pois seu comportamento está bem próximo do de um gás ideal. Com o parafuso conectado à seringa com êmbolo móvel varie gradualmente o volume do gás confinado nela. A medição da variação do volume é feita através da graduação existente na parede da seringa. A partir do manômetro pode-se verificar a variação de pressão em relação à pressão atmosférica.

Figura 4: Esquema Experimental



**4.5 Folha de Manipulação :  
Transformação de um gás a Temperatura Constante**

Data: ..... Turma:.....

Grupo

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

1. Abra a válvula do manômetro e eleve o êmbolo da seringa até que seja alcançado o volume inicial de 5,0 ml. Logo em seguida, feche a válvula de modo que o ar no interior da seringa e da mangueira fique confinado. Verifique se não há vazamento de ar.

2. Desloque o êmbolo comprimindo o ar de modo que a diferença de nível de volume diminua em intervalos regulares (Volume na seringa,  $V_S$ ). Complete a Tabela 3 sabendo que:  $p = p_{man} + p_0$ ,  $p_{man}$  é a pressão aferida no manômetro e  $p_0$  é a pressão atmosférica quando a válvula está aberta. Considere  $p_0 = 760$  mmHg.

3. O produto  $pV_S$  deve permanecer constante? Por que?

.....  
.....  
.....

4. Faça o gráfico  $V_S$  vs  $1/p$  e procure interpretar a curva obtida. Por que é esperado que essa curva seja uma reta?

5. Utilize um termômetro para medir a temperatura ambiente do ar, expressando seu valor em Kelvin:

$$T = \dots \pm \dots \quad (5)$$

6. Utilizando o método dos mínimos quadrados, obtenha os coeficientes angular e linear da reta que se ajusta aos dados de  $V_S$  em função de  $1/p$ . A partir de um desses coeficientes e da temperatura ambiente do ar, determine a massa, em gramas, do ar confinado na mangueira e na seringa. Dados: Massa molar do ar = 28,8 g / mol,  $R = 8,31$  J / mol K.

7. Utilize os valores obtidos acima para estimar a densidade do ar no laboratório,

$$\rho = \dots \pm \dots \quad (6)$$

Tabela 3: Dados Exp. de  $V_S$  vs  $1/p$ .

$V_S \pm \Delta V_S$	$p \pm \Delta p$	$1/p \pm \Delta(1/p)$	$pV_S \pm \Delta(pV_S)$

## 5 Equivalente Mecânico da Caloria

### 5.1 Objetivo

Determinar experimentalmente a equivalência Joule-Caloria.

### 5.2 Material utilizado

- Calorímetro (Phywe);
- Bécher de 500 ml;
- Balança;
- Fonte de tensão (Phywe);
- termômetro;
- Cronômetro digital.

### 5.3 Teoria

Quando um sistema termodinâmico se encontra isolado, sua evolução em direção ao equilíbrio térmico ocorrerá através de transferência de calor apenas entre as diferentes partes do sistema. Dessa forma, o balanço de energia após todas as trocas de calor  $Q_i$  em um sistema composto de  $n$  partes implicará em  $\sum_1^n Q_i = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 0$ . Portanto, se um corpo quente é colocado num em contato térmico com água fria, sabemos que o corpo resfria e a água aquece, até que ambos atinjam a mesma temperatura. Dizemos que isto é resultado da transferência de energia do corpo para a água. Assim podemos definir calor como sendo a energia transferida entre sistemas com temperaturas diferentes e sua unidade conhecida como caloria. Uma caloria é definida como a energia necessária para elevar a temperatura de 1g de água entre as temperaturas  $14,5^\circ\text{C}$  e  $15,5^\circ\text{C}$ , pois nesse intervalo de temperatura o calor específico da água se mantém praticamente constante. Durante o século XIX a identificação do calor como uma forma de energia levou à procura de uma relação entre a caloria e a unidade mecânica de energia, que é o Joule no SI, ou seja, procurou-se

determinar o valor da razão conhecida como equivalente mecânico do calor ou constante de Joule  $Z$ . Essa razão é expressa pela equação :

$$Z = \frac{W}{Q} \quad (7)$$

Em 1868 Joule determinou experimentalmente o equivalente mecânico de calor empregando um dispositivo mecânico contendo paletas. As paletas foram submersas em água num calorímetro e colocadas em movimento por pesos. Calculando o trabalho mecânico e a variação de temperatura da água, Joule determinou a constante  $Z$ . A constante  $Z$  depende do sistema de unidade. Se o trabalho ( $W$ ) for medido em Joules e a quantidade de calor ( $Q$ ) for medida em calorias, temos que:  $Z = 4.18 \text{ Joule/cal}$ .

O valor atualmente aceito é  $Z = 4,1868 \text{ J/Cal}$ .

Imagine o caso onde o trabalho é fornecido por uma resistência elétrica de acordo com a montagem mostrada na Figura 5. Neste caso, a energia transferida para a água eleva a temperatura inicial  $T_i$  para um valor final  $T_f$  e a quantidade de calor recebida pelo sistema é dada por:

$$Q = (m_a c + C_{cal})(T_f - T_i), \quad (8)$$

onde  $m_a$  é a massa da água em [gramas],  $C_{cal}$  é a capacidade térmica do calorímetro em [cal/ $^\circ\text{C}$ ] e  $c$  é o calor específico da água ( $1,0 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$ ). Já a potência (dissipada pela resistência, desconsiderando as perdas resistivas dos fios e contatos e considerando os valores rms, é:

$$P = VI, \quad (9)$$

onde  $V$  é a diferença de potencial entre os terminais da resistência (aquecedor) em [Volts] e  $I$  é a corrente que passa pela resistência (aquecedor) em [Ampères]. OBS: os instrumentos amperímetro e voltímetro fornecem os valores rms da corrente e tensão respectivamente.

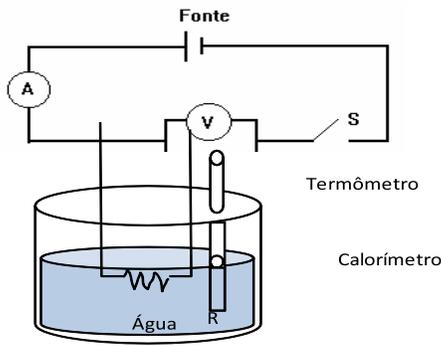


Figura 5: Esquema de uma montagem experimental para determinar o equivalente mecânico em caloria. A fonte de corrente alternada fornece uma corrente  $I_{rms}$  ao circuito ligado em série a uma resistência  $R$ ,  $V_{rms}$  é a queda de tensão nos terminais da resistência. Com o aquecimento da resistência a água se aquece.

Assim, o trabalho realizado pela corrente elétrica, num intervalo de tempo  $\Delta t$ , é

$$W = P\Delta t. \quad (10)$$

Portanto, neste caso, a razão  $Z$  será

$$Z = \frac{W}{Q} = \frac{VI\Delta t}{[(m_a c + C_{cal})\Delta T]}, \quad (11)$$

a qual deve resultar no valor 4,1868 J/Cal. Na equação para  $Z$ , temos:

$V$  = diferença de potencial sobre a resistência (aquecedor) em Volts.

$I$  = Corrente que passa pela resistência (aquecedor) em Ampères.

$\Delta t$  = tempo de passagem de corrente em segundos.

$m_a$  = massa da água adicionada ao calorímetro.

$C_{cal}$  = capacidade térmica do calorímetro em cal/ $^{\circ}$ C.

$\Delta T$  = variação de temperatura em Celsius.

Portanto, na experiência que será realizada no laboratório, precisa-se determinar a massa da água que será inserida no calorímetro. Depois, é fornecida uma quantidade de energia conhecida para se aquecer a água. Sabendo a energia fornecida e a correspondente variação de temperatura, determina-se o equivalente mecânico (aqui o *equivalente elétrico*) da caloria.

## 5.4 Procedimento experimental : Equival. Mec. da Caloria

Data: ..... Turma:.....  
 Grupo  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....

**Atenção :** Jamais ligue o aquecedor fora d'água. Isso danificará o aparelho.

OBS: A corrente que vai passar pelo aquecedor (resistência elétrica) e a diferença de potencial (voltagem) entre os seus terminais já foram determinadas previamente.

1. Pegue um bequer com capacidade maior de que 300 ml e meça a sua massa.

$$m_{BequerVazio} = \dots \pm \dots$$

2. Insira no bequer acima uma quantidade de água de aproximadamente 300 ml. Meça a massa do béquer com água e determine a massa da água  $m_a$  que será inserida no calorímetro.

$$m_{Bequer\ c\ agua} = \dots \pm \dots$$

$$m_a = \dots \pm \dots$$

3. Insira a massa  $m_a$  de água no calorímetro. Faça movimentos com o termalizador e espere aproximadamente 1,5 minutos, medindo com o termômetro a temperatura de equilíbrio  $T_i$  no calorímetro.

$$T_i = \dots \pm \dots$$

- Somente pode-se acionar a fonte quando o resistor estiver totalmente submerso na água.
- O termômetro não deve ser retirado do calorímetro durante o experimento.
- O circuito deve ser ligado à fonte com 8V AC.

### Determinação da razão $Z$ . Constantes fornecidas

- $V = ( 7,5 \pm 0,2 )$  Volts.
- $I = ( 2,9 \pm 0,2 )$  Ampères.
- $C_{cal} = ( 16,5 \pm 0,5 )$  Cal/ °C.

4. Acione o circuito por 3 minutos (180 s), desligue a fonte, agite o termalizador e após 1,5 minutos meça a temperatura  $T$ . A temperatura de equilíbrio será a temperatura máxima atingida pelo sistema. Repita esse procedimento de modo a preencher a tabela abaixo.
5. Faça uma gráfico de  $W$  versus  $Q$  e, através do MMQ, determine o valor da razão  $Z$  bem como sua respectiva incerteza. Compare o valor encontrado com o valor 4,1868 J/Cal (estabelecido pelo Bureau Internacional de Pesos e Medidas).

Tabela 4: Equivalente mecânico da Caloria

$T(^{\circ}C)$	$\Delta T = T - T_i(^{\circ}C)$	Q (Cal)	Tempo (s)	Tempo Total(s)	W(J)

## 6 Ondas Estacionárias em Cordas

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (13)$$

### 6.1 Objetivo

Estudar a formação de ondas estacionárias transversais em uma corda e determinar as frequências de ressonâncias correspondentes aos quatro primeiros harmônicos.

### 6.2 Material utilizado

⊗ Gerador de sinais; ⊗ Alto falante; ⊗ Fios de conexão ; ⊗ Pesos; ⊗ Régua graduada e uma trena; ⊗ Suporte com garras; ⊗ Barbante (ou outro fio com densidade linear conhecida).

### 6.3 Teoria

Ondas a propagarem-se num espaço confinado, como por exemplo, as ondas numa corda de piano ou guitarra, sofrem reflexões em ambas as extremidades da corda. Assim, formam-se ondas que se movimentam na mesma direção e em sentidos opostos. Estas ondas combinam-se de acordo com o princípio da superposição. Para cada corda, existem frequências (chamadas de frequências de ressonância) nas quais a sobreposição conduz a uma configuração de vibração estacionária, denominada onda estacionária.

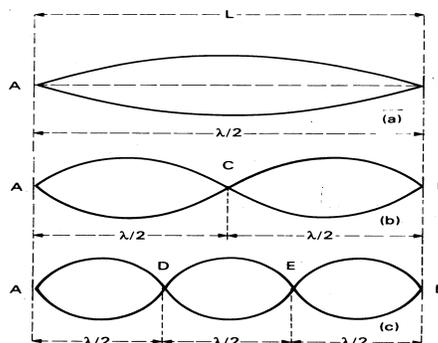
Uma corda (ou fio), fixa em suas extremidades, entra em ressonância nas seguintes frequências:

$$f_n = \frac{v}{2L}n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots, \quad (12)$$

onde  $n$  é o número do harmônico [adimensional];  $L$  é o comprimento da corda e  $v$  é a velocidade das ondas transversais na corda (fio), cuja superposição deu origem à onda estacionária. A velocidade  $v$ , que é a mesma para todas as frequências, pode ser obtida usando a equação :

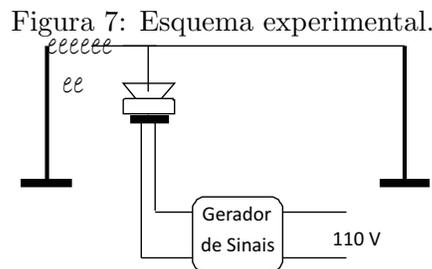
onde  $T$  é a força que traciona a corda (fio) e  $\mu$  é a densidade linear da corda (fio). A Figura 6 abaixo representa os modos de vibração de uma corda de comprimento  $L$ , fixa em ambas as extremidades.

Figura 6: Diferentes modos de vibração de uma corda com extremidades fixas.



### 6.4 Procedimento experimental

Para atingir os objetivos desta experiência, será utilizada uma experiência conforme o esquema representado na Figura 7. As frequências de ressonâncias serão determinadas variando lentamente a frequência no gerador de sinais e observando o movimento do corda.



## 6.5 Folha de manipulação - Ondas Estacionárias

Data: ..... Turma:.....

Grupo

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

1. Observe a formação de ondas estacionárias no fio e determine a frequência de ressonância dos harmônicos correspondentes, preenchendo a Tabela 5 abaixo. A ressonância pode ser encontrada variando-se lentamente a frequência de vibração da corda no gerador de sinais.

2. Meça o comprimento entre os nós externos da corda:

$$L = \dots \pm \dots \quad (14)$$

3. Faça um gráfico de  $f$  em função de  $n$ . Por que é esperado que esse gráfico tenha um comportamento linear?

4. A partir da Tabela 5 acima e do valor de  $L$ , use o método dos mínimos quadrados para calcular a velocidade de propagação da onda:

$$v = \dots \pm \dots \quad (15)$$

5. Meça na balança a massa presa na extremidade da corda. Determine então a tração na corda, escrevendo-a como:

$$T = \dots \pm \dots \quad (16)$$

6. A partir dos valores de  $T$  e  $v$ , obtenha a densidade linear da corda:

$$\mu_1 = \dots \pm \dots \quad (17)$$

7. A densidade linear da corda também pode ser obtida diretamente a partir dos valores do comprimento e da massa da corda. Meça com uma trena o comprimento da corda e com a balança sua massa. Determine então a densidade linear da corda: OBS: Não precisa utilizar a corda utilizada na experiência, basta utilizar uma corda feita do mesmo material!!!

$$\mu_2 = \dots \pm \dots \quad (18)$$

8. Os valores de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  concordam dentro da margem de erro do experimento?

9. Que efeito um aumento da tensão na corda tem sobre a frequência de ressonância de um dado harmônico  $n$ ? e sobre o comprimento de onda?

Tabela 5: Dados experimentais de  $n$  e  $f$ .

$i$	$n$	$f(\text{Hz})$	$X^2$	$XY$	$a + b \times X$	$\Delta Y^2$
1						
2						
3						
4						
5						
$\Sigma_{i=1}^N$						

$$a = \dots \pm \dots$$

$$b = \dots \pm \dots$$

## 7 Velocidade do Som Usando o Tubo de Kundt

### 7.1 Objetivo

Investigar a formação de padrões de ondas sonoras estacionárias e determinar a velocidade do som em um cilindro metálico usando um tubo de Kundt.

### 7.2 Material utilizado

- ⊗ Tubo de vidro; ⊗ bolinhas de isopor; ⊗ Um cilindro metálico de latão e um de aço;
- ⊗ Régua graduada;

### 7.3 Teoria

Ao emitirmos ondas sonoras na extremidade de um tubo contendo ar o qual está fechado na extremidade oposta, podemos obter, para certos comprimentos do tubo de ar, padrões de ondas estacionárias identificados por um máximo na intensidade do som produzido pelo gerador de vibrações. Nesse caso, teremos o fenômeno de ressonância, a qual ocorrerá quando as ondas sonoras que entram em uma das extremidades e as que são refletidas na extremidade oposta interferirem de modo construtivo. Na ressonância, a frequência  $f$  do gerador coincide com uma das frequências naturais de vibração da coluna de ar no tubo.

Fixando uma dada frequência para as ondas sonoras em um tubo fechado em uma das extremidades, as ressonâncias ocorrerão para os comprimentos:

$$L_n = \frac{\lambda}{4}n, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (19)$$

Nesta equação,  $L_n$  representa o comprimento do tubo para o harmônico  $n$  e  $\lambda$  o comprimento de onda da onda sonora. Note que no tubo fechado em uma das extremidades, somente os harmônicos ímpares estão presentes.

A onda sonora será gerada por fricção de um cilindro metálico contendo um disco

em sua extremidade que transmite a onda sonora para o ar dentro do tubo de vidro (Kundt). Ao atritarmos o cilindro metálico geramos uma onda sonora com frequência bem definida que chamaremos de  $f$ . Veja a figura 8 Observe que caso a velocidade do som no ar seja conhecida e o comprimento das ondas estacionárias no tubo de vidro, podemos determinar a velocidade do som no cilindro metálico. Ou ainda, conhecida a velocidade do som no cilindro metálico podemos determinar a velocidade do som no gás (no nosso caso, ar) que enche o tubo. A prova disso é simples: primeiro consideremos que a velocidade do som no cilindro metálico seja  $v_m$ , assim

$$v_m = f \times \lambda_m, \quad (20)$$

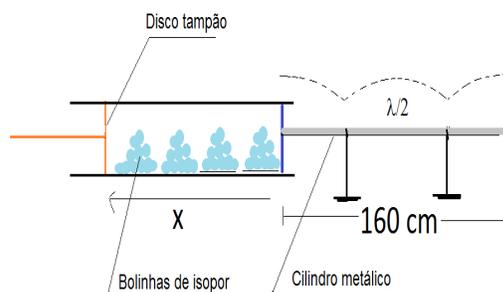
onde  $f$  é a frequência e  $\lambda_m$  é o comprimento de onda no cilindro metálico. Como vemos na figura 8, temos que  $\lambda_c = 160\text{cm}$ . Analogamente, a velocidade do som no ar  $v_{gas}$  é

$$v_{gas} = f \times \lambda_{gas}, \quad (21)$$

onde  $f$  é a frequência que não muda ao passar do metal para o ar, e  $\lambda_{gas}$  é o comprimento de onda no ar. Eliminando a frequência nestas duas equações, obtemos a velocidade do som no cilindro metálico em termos da velocidade do som no ar:

$$v_m = v_{gas} \frac{\lambda_m}{\lambda_{gas}}. \quad (22)$$

Figura 8: Esquema Experimental



### 7.4 Folha de manipulação : Velocidade do Som usando um Tubo de Kundt.

Data: ..... Turma:.....  
 Grupo  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....

### 7.5 Procedimento experimental

A ressonância será produzida num tubo de vidro contendo ar e cujo comprimento da coluna de ar pode ser ajustado movendo-se o disco tampão(veja o esquema experimental na Figura 8). Espalhamos pelo tubo de vidro pequenas bolinhas de isopor secas. O cilindro metálico é fixado firmemente em dois pontos situados a 40 cm de cada extremidade. Para gerar a vibração é necessário atritar com um pano contendo pó de broca no segmento médio do cilindro metálico. Fazemos vibrar o cilindro de metal e vamos movendo o disco no outro extremo do tubo de vidro pouco a pouco, até observarmos uma disposição bem definida (situação de ressonância) dos planos de bolinhas. Medindo a distância entre os nós da onda estacionária formada, definidos pela ausência vibração das bolinhas, determinamos o comprimento de onda no ar da oscilação gerada pelo cilindro metálico.

1. Anote o comprimento de onda da onda sonora gerada no cilindro metálico:

$$\lambda_m = \dots \pm \dots \quad (23)$$

2. Após colocar o cilindro metálico para vibrar friccionando-o com o pano, observe a formação de padrões de ressonância no interior do tubo de vidro à medida que o comprimento da coluna de ar é variado. Preencha então a Tabela 6 abaixo:
3. Construa um gráfico do comprimento  $X = L_n$  (comprimento da coluna de ar) em função do modo de vibração  $n$ . Por que é esperado que esse gráfico tenha um comportamento linear?
4. A partir da tabela 1, use o método dos mínimos quadrados para obter o comprimento de onda  $\lambda_{gas} \pm \Delta\lambda_{gas}$ ?

$$\lambda_{gas} = \dots \pm \dots \quad (24)$$

5. Calcule a velocidade  $v_m$  do som no cilindro usando que  $v_{gas} = (340 \pm 2)\text{ms}^{-1}$ :

$$v_m = \dots \pm \dots \quad (25)$$

Tabela 6: Dados experimentais de  $L_n$  e  $n$ .

$i$	$n$	$L_n(\text{cm})$	$n^2$	$nL_n$	$a + b \times x$	$\Delta Y^2$
1						
2						
3						$a = \dots \pm \dots$
4						
5						$b = \dots \pm \dots$
$\Sigma_{i=1}^N$						

## 8 Reflexão e refração da luz

### 8.1 Objetivo

Constatar as leis da reflexão e da refração da luz, bem como determinar o índice de refração de um material e o ângulo limite.

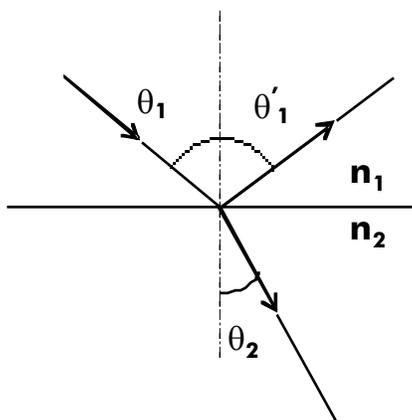
### 8.2 Material utilizado

⊙ Banco óptico; ⊙ Tábua de ângulos; ⊙ Tela de fendas; ⊙ Lente cilíndrica; ⊙ Tela opaca; ⊙ Fonte de luz; ⊙ Base para as telas; ⊙ Máscara; ⊙ Lente convergente.

### 8.3 Teoria

Quando um feixe de luz incide sobre a superfície de separação entre dois meios, parte dele é refletida e a outra parte é desviada (refratada) ao penetrar no segundo meio (Fig. 9). Onde

Figura 9: Reflexão e refração da luz



- $n_1$  = índice de refração no meio 1;
- $n_2$  = índice de refração no meio 2;
- $\theta_1$  = ângulo de incidência;
- $\theta_2$  = ângulo de refração e
- $\theta_1'$  = ângulo de reflexão.

As leis da reflexão e da refração são as seguintes:

- Os raios refletido e refratado estão contidos no plano formado pelo raio incidente com a normal à superfície no ponto de incidência;

- reflexão:  $\theta_1 = \theta_1'$ ; e

- refração :  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ .

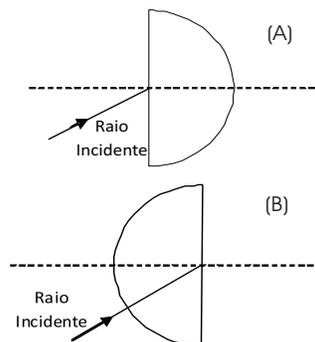
Quando o meio 1 é mais refringente de que o meio 2 ( $n_1 > n_2$ ), o ângulo de refração é maior que o de incidência. À medida que  $\theta_1$  aumenta, o raio refratado afasta-se da normal, até sair tangente à superfície ( $\theta_2 = 90^\circ$ ), e temos

$$n_1 \sin \theta_L = n_2, \quad (26)$$

onde  $\theta_L$  é o ângulo limite. A partir deste ângulo somente ocorre reflexão.

Complete o desenho mostrando abaixo desenhando o que ocorre com os raios incidentes, refletido e refratado, no caso em que a luz incide pela parte reta (Figura 10.(a)) e pela parte curva (Figura 10.(b)) de uma lente cilíndrica.

Figura 10: Reflexão e refração da luz



### 8.4 Procedimento experimental - Leis da Reflexão e Refração

Data: ..... Turma:.....

Grupo

Nome:.....

Nome:.....

Nome:.....

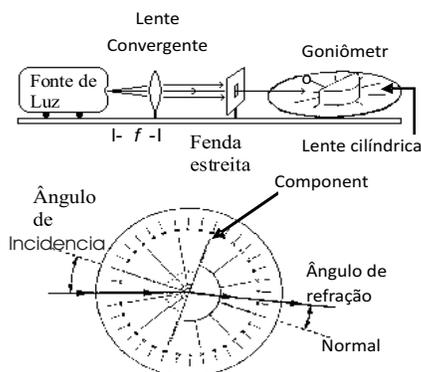
Nome:.....

Vamos dividir esta experiência em duas partes, 1ª PARTE: constatação das leis da reflexão e refração e a determinação do índice de refração da lente; e 2ª PARTE: determinação do ângulo limite.

#### 1ª PARTE : Reflexão e Refração da Luz

1. Monte o equipamento conforme mostrado na Figura 11. Alinhe a superfície plana da lente cilíndrica com a linha rotulada *component*. A lente estará alinhada quando as linhas radiais da tábua de ângulos (goniômetro) ficarem perpendiculares à superfície curva da lente. Ajuste o sistema de tal modo que um único raio de luz passe diretamente através do centro do goniômetro. Nesta situação o raio luminoso emerge perpendicularmente à superfície curva da lente.

Figura 11: Reflexão e refração da luz



2. Fazendo a luz incidir na superfície plana da lente e sem perturbar o alinhamento da mesma, gire o goniômetro a fim de observar o raio refratado para vários ângulos do raio incidente.
3. Complete na tabela os ângulos de reflexão e refração, correspondentes aos ângulos de incidência indicados.

$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$	$\text{sen}\theta_1$	$\text{sen}\theta_2$	$\Delta \text{sen}\theta_1$	$\Delta \text{sen}\theta_2$
0					
10					
20					
30					
40					
50					
60					
70					
80					

$$\Delta\theta_1 = \dots\dots \quad \Delta\theta_2 = \dots\dots$$

Obs: Durante as medidas faça uso da lei de reflexão da luz para conferir o alinhamento da lente.

4. Faça um gráfico  $\text{sen}\theta_1$  x  $\text{sen}\theta_2$  em papel milimetrado. Por que é esperado que esse gráfico tenha um comportamento linear?
5. Considere o índice de refração do ar igual a 1,00 e a partir dos dados na Tabela 7, use o método dos mínimos quadrados para encontrar o índice de refração da lente cilíndrica ( $n_L$ ).

$$n_L = \dots\dots \pm \dots\dots \quad (27)$$

**2ª PARTE: Reflexão Interna ou reflexão Total da Luz**

- 6. Sem perturbar o alinhamento feito anteriormente, posicione a lente cilíndrica de modo que a superfície curva da mesma esteja voltada para o feixe incidente. Use a tela opaca (anteparo) para detectar os raios refratados mais fracos.
- 7. Procure a situação em que ocorre reflexão total da luz e meça o ângulo limite  $\theta_L$ .
- 8. O que você entende por ângulo limite?
- 9. Calcule o índice de refração da lente cilíndrica a partir de  $\theta_L$  encontrado acima. OBS: faça a propagação de erros e encontre esse resultado como:
- 10. Pode existir reflexão total quando a luz passa de um meio menos refringente para um meio mais refringente ( $n_1 < n_2$ )? Justifique.
- 11. Observe que  $\theta_L$  não é o mesmo para cada cor do raio refratado. Explique.

$$n_L = \dots \pm \dots \quad (28)$$

Tabela 7: Dados experimentais de  $\sin \theta_1$  e  $\sin \theta_2$  para uso no MMQ.

$i$	$\sin \theta_1$	$\sin \theta_2$	$X^2$	$XY$	$a + b \times X$	$\Delta Y^2$
1						
2						
3						$a = \dots \pm \dots$
4						
5						$b = \dots \pm \dots$
6						
7						
8						
9						
$\sum_{i=1}^N$						

## 9 Interferência e Difração

### 9.1 Objetivo

- Observar os fenômenos de difração e interferência da luz;
- Determinar experimentalmente a largura de uma fenda usando o padrão de difração;
- Determinar experimentalmente a distância entre fendas usando o padrão de interferência;
- Estimar a espessura de um fio fino (fio de cabelo).

### 9.2 Material utilizado

- Fonte de luz laser (hélio-neônio:  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ )
- Conjunto de slides com fendas;
- Anteparo com suporte;
- Porta slide com suporte;
- Fio de cabelo.

### 9.3 Teoria

#### PARTE I: Difração :

Difração é a denominação genérica dada aos fenômenos associados a desvios da propagação da luz em relação ao previsto pela ótica geométrica. Nesse contexto, suponha uma fenda de largura  $a$ , iluminada por um feixe de luz de fonte monocromática de comprimento de onda  $\lambda$ . Pode ser demonstrado que a distribuição da intensidade da luz sobre um ponto do anteparo, localizado pelo ângulo  $\theta$ , é dada por:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad (29)$$

onde

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta. \quad (30)$$

Note que  $I_0$  é a intensidade central no anteparo. Segundo a equação (29), as

posições sobre o anteparo em que a intensidade da luz será zero (mínimos de difração) estão associadas à condição:

$$\sin \alpha = 0 \implies \alpha = m\pi, \quad (31)$$

com  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Esta mesma condição pode ser expressa como:

$$a \sin \theta = m\lambda \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (32)$$

A Figura 12 ilustra a distribuição de intensidade de luz sobre um anteparo (figura de difração) quando atravessamos uma única fenda com a luz laser.

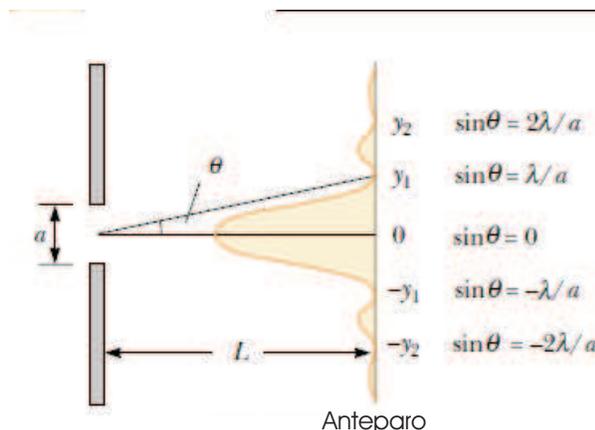


Figura 12: (a) Padrão de difração para fenda única.

#### PARTE II: Interferência:

Se incidirmos o laser em múltiplas fendas, produziremos o fenômeno de interferência. Quando usamos, em um mesmo slide,  $N$  fendas ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ), separadas por uma distância  $d$ , a intensidade da luz será dada por:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2 \quad (33)$$

onde

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta. \quad (34)$$

Note que para  $N = 1$  recairemos na mesma expressão do fenômeno da difração.

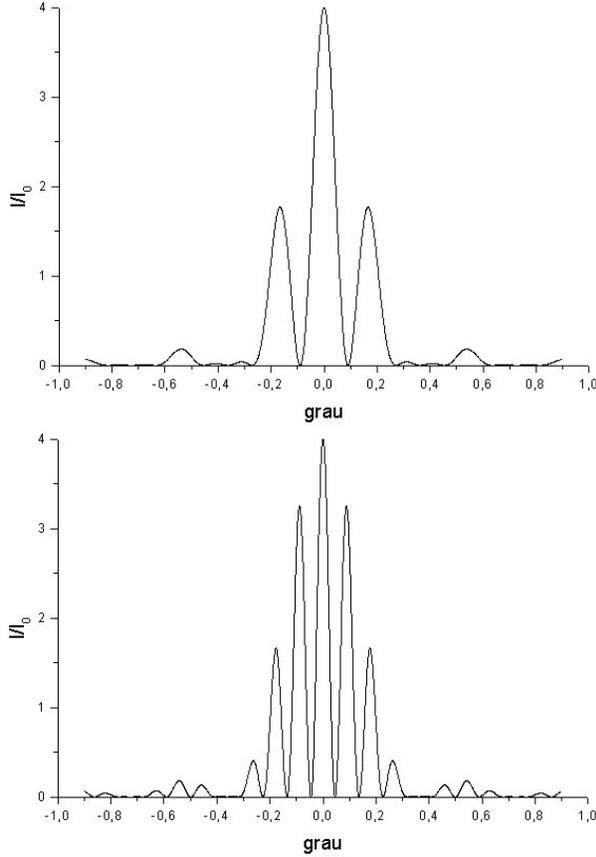


Figura 13: Padrões de difração para  $N = 2$ . As larguras das fendas estão indicadas no texto.

Para uma situação com  $N = 2$  (duas fendas), ilustramos na Figura 13 a distribuição de intensidade de luz sobre um anteparo, colocado a 2,5 m do slide, quando as duas fendas são atravessadas por um laser de hélio-neônio. Para a Figura 13.(a) usamos  $a = 0.10$  mm e  $d = 0.20$  mm e para a Figura 13.(b) usamos  $a = 0.10$  mm e  $d = 0.40$  mm.

Observe que as posições sobre o anteparo com intensidades máximas e mínimas da luz podem ser obtidas diretamente das Eqs. (33) e (34). Tomando  $N = 2$ , os mínimos de interferência serão dados pela condição

$$\frac{\text{sen}2\beta}{\text{sen}\beta} = 0 \Rightarrow \cos\beta = 0, \quad (35)$$

a qual implica em

$$d \text{sen}\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (36)$$

Podemos notar ainda na Figura 13 que o padrão de interferência é modulado espacialmente, ou seja, os máximos de interferência possuem intensidades variáveis. De fato, se a largura das fendas não é desprezível quando comparada com a distância entre as fendas, esse padrão de interferência é modulado espacialmente pelo padrão de difração da fenda. Essa modulação espacial pode ser representada como uma envoltória nas franjas, conhecida como envoltória de difração.

## 9.4 Procedimento Experimental: Interferência e Difração

Data: ..... Turma:.....  
 Grupo  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....  
 Nome:.....

**Atenção :** Nunca olhe diretamente para o feixe de laser, ele pode ferir sua retina e deixar uma região cega.

### • Difração por uma fenda estreita

Observe, contra a luz, os dois slides disponíveis com fenda única. As larguras nominais das fendas são 0,1 mm 0,2 mm. Ilumine com laser cada uma dessas fendas e observe o padrão gerado, ou seja, a figura formada no anteparo. Observe o que ocorre com o padrão, em função da largura da fenda, iluminando estas fendas uma a uma. Escolha um dos slides e, a partir das medidas relativas ao padrão gerado, determine a largura da fenda usando a Eq. (32) para os mínimos de difração. Para fazer isso, considere a aproximação

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{D},$$

com  $y$  denotando a distância entre o máximo central e um mínimo de difração e  $D$  a distância da fenda ao anteparo. Perceba que essa aproximação é boa para  $\theta$  pequeno, ou seja, para  $D \gg y$ .

1. Meça  $D$  com uma trena:

$$D = \dots \pm \dots$$

2. Para obter  $y$ , meça no anteparo, com o auxílio de uma régua, a distância entre dois mínimos igualmente distantes do máximo central. Por exemplo, você pode escolher medir a distância  $y'$  entre

os dois primeiros mínimos de difração em torno do máximo central, os quais correspondem a tomar  $m = 1$  na Eq. (32):

$$y' = \dots \pm \dots (m = \dots)$$

3. O valor de  $y$  será então dado por  $y = y'/2$ , o qual resulta em

$$y = \dots \pm \dots$$

4. Usando agora a Eq. (32), obtenha a largura  $a$  da fenda:

$$a = \dots \pm \dots$$

### • Interferência por duas fendas (slide U14101)

Observe, contra a luz, o slide de fenda dupla U14101. Encontre no slide a configuração com distância nominal entre as fendas dadas por  $g = 0,25$  mm e largura nominal de fenda dada por  $b = 0,15$  mm. Observe então a figura de interferência produzida no anteparo e tente enxergar também as *envoltórias* de difração.

Usando uma metodologia similar ao que foi feito no experimento anterior da fenda única, mas agora usando a Eq. (36), meça  $D$  e  $y$ , obtendo então a distância  $d$  entre as fendas.

**Atenção:** os primeiros mínimos correspondem agora a  $m = 0$ .

1.  $D = \dots \pm \dots$
2.  $y' = \dots \pm \dots (m = \dots)$
3.  $y = \dots \pm \dots$
4.  $d = \dots \pm \dots$

### • Difração por um fio de cabelo

Pode-se usar a difração para estimar a espessura de um fio de cabelo. De fato, é possível mostrar que o padrão de difração produzido por um dado obstáculo e essencialmente o mesmo

que aquele produzido por uma abertura da mesma forma. Esse resultado é conhecido como *Princípio de Babinet*. Usando novamente o procedimento adotado no experimento de difração com fenda única, obtenha uma estimativa para a espessura  $a$  de um fio de cabelo.

1.  $D = \dots \pm \dots$
2.  $y' = \dots \pm \dots$  ( $m = \dots$ )
3.  $y = \dots \pm \dots$
4.  $a = \dots \pm \dots$

## 10 APÊNDICE I: Propagação de Erros

### 10.1 Algarismos Significativos

Em uma medida, os algarismos significativos são aqueles lidos com certeza do instrumento de medida mais um algarismo duvidoso. Esse algarismo duvidoso (o qual também é significativo) pode ser estimado pelo operador do instrumento (no caso de instrumentos analógicos) ou dado diretamente pelo instrumento (no caso de instrumentos digitais). Exemplos:

- $15,63 \text{ cm} \implies 4$  algarismos significativos
- $2,60 \text{ s} \implies 3$  algarismos significativos
- $0,34 \text{ cm} = 3,4 \text{ mm} \implies 2$  algarismos significativos

Note que zeros a esquerda (como no último exemplo acima) *não* são significativos, pois podem ser eliminados por uma transformação de unidades ou escrevendo a medida em notação científica.

### 10.2 Notação científica

A notação científica é bastante útil para explicitarmos o número de algarismos significativos de uma medida. Além disso, ela fornece uma representação adequada para números muito grandes ou números muito pequenos. Exemplos de representações em notação científica:

- $0,0040 \text{ cm} \implies 4,0 \times 10^{-3} \text{ cm}$
- $980,35 \text{ cm/s}^2 \implies 9,8035 \times 10^2 \text{ cm/s}^2$
- $0,00005 \text{ s} \implies 5 \times 10^{-5} \text{ s}$

Observe que a representação em notação científica constitui-se de um algarismo significativo antes da vírgula associado a uma potência de 10 conveniente.

### 10.3 Transformações de unidades

A regra geral da transformação de unidades é que se mantenha o número de algarismos significativos no processo de transformação de unidades. Exemplos:

- $0,043 \text{ m} \implies 4,3 \text{ cm}$
- $8,9 \text{ m/s} \implies 8,9 \times 3,6 \text{ km/h} = 32 \text{ km/h}$ .

### 10.4 Arredondamentos

Muitas vezes, ao realizarmos operações matemáticas com as medidas realizadas no laboratório, é necessário eliminar algarismos excedentes (não-significativos) através de arredondamentos de resultados. Nessa direção, a primeira regra básica é que devemos evitar arredondamentos intermediários, ou seja, arredondamentos devem ser realizados na etapa final dos cálculos, quando estivermos obtendo as quantidades físicas que representam o objetivo do experimento realizado. Quanto ao arredondamento em si, podemos fazê-lo adotando-se a seguinte regra:

- se o algarismo seguinte ao último que se quer manter encontra-se entre 000... e 499..., basta excluí-los.
- se o algarismo seguinte ao último que se quer manter encontra-se entre 500... e 999..., aumenta-se de uma unidade o último algarismo.

Exemplos: Nos casos abaixo, quer se manter como último algarismo aquele que está sublinhado (é uma notação usual sublinharmos o algarismo duvidoso de uma medida ou do resultado de uma operação matemática sobre uma medida):

- $\underline{8},350 = 8$
- $8,\underline{3}50 = 8,4$
- $8,3\underline{5}0 = 8,35$

## 10.5 Operações com algarismos significativos

Ao se efetuar cálculos com valores experimentais e constantes deve-se tomar cuidado para não expressar o resultado com um número de algarismos excessivo, o que não tem qualquer sentido. Neste sentido, ao realizarmos operações matemáticas com algarismos significativos, adotamos as regras abaixo.

### 10.5.1 Adição e Subtração

O resultado deve preservar a mesma quantidade de casas decimais da parcela com menos casas decimais.

- $(23,4 + 8 + 1,55) \text{ m} = 32,95 \text{ m} = 33 \text{ m}$
- $(23,422 - 8,00) \text{ m} = 15,422 \text{ m} = 15,42 \text{ m}$

### 10.5.2 Multiplicação e divisão

O resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos que a parcela com menos algarismos significativos.

- $5,541 \times 2,0 = 11,082 = 11$
- $0,452 \text{ A} \times 2671 \Omega = 1,21 \times 10^3 \text{ V}$
- $63,72 \text{ cm}/23,1 \text{ s} = 2,76 \text{ cm/s}$

### 10.5.3 Funções transcendentais

O resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos que o argumento da função.

- $\sin 50^\circ = 0,766044 = 0,77 = 7,7 \times 10^{-1}$
- $\ln 101 = 4,6151 = 4,62$

## 10.6 Introdução à Teoria de Erros

Resultados de procedimentos experimentais devem ser representados de modo geral como

$$M = (m \pm \Delta m) \text{ unidade}, \quad (37)$$

onde  $M$  é a grandeza física considerada,  $m$  é o valor numérico encontrado para essa grandeza (expresso com o número correto de algarismos significativos) e  $\Delta m$  é a incerteza (ou erro experimental) associada ao procedimento experimental realizado.

## 10.7 Incerteza (ou erro)

A incerteza (ou erro) de um resultado experimental deve ter no máximo 2 algarismos significativos, podendo ter apenas 1 único algarismo. O último algarismo significativo do valor do mensurando é determinado pelo último algarismo significativo da incerteza. Exemplos:

- $a = (6,57 \pm 0,05) \text{ m/s}^2$
- $a = (6657 \pm 13) \times (10^{-3} \text{ m/s}^2)$

Pode-se expressar um valor sem explicitar-se a incerteza associada. Nestes casos está implícito que existe um limite de erro de no máximo 0,5 do último algarismo significativo. Por exemplo:  $d = 5,5 \times 10^2 \text{ km} \implies (5,50 \pm 0,05) \times 10^2 \text{ km}$ .

## 10.8 Classificação dos erros

Quanto à sua origem e sua maneira de atuar no experimento, os erros experimentais classificam-se em

- *Erro sistemático*: Afeta o experimento sempre da mesma maneira, deslocando o valor da medida em um mesmo sentido. A presença de um erro sistemático provocará ou um aumento ou uma diminuição no valor obtido de todas as medidas realizadas. Exemplo: Erro na calibração de uma balança.
- *Erro de escala*: Este erro ocorre devido ao limite natural de precisão de qualquer instrumento de medida, ou seja, está associado ao *limite de erro de calibração* do instrumento. O erro de escala afeta qualquer medida, visto que

qualquer instrumento utilizado para realizar medidas terá um limite de precisão. Exemplo: Uma régua graduada em milímetros não tem precisão para estimar comprimentos em micrômetros ( $1\ \mu\text{m} = 10^{-3}\ \text{mm}$ ), pois possui associado a ela um erro bem maior que  $1\ \mu\text{m}$ .

- **Erro aleatório:** Afeta o experimento de forma imprevisível, ora aumentando o valor obtido para uma medida ora diminuindo seu resultado. Exemplo: Alterações em medidas devido a flutuações na rede elétrica, a vibrações no aparato experimental, a variações de temperatura, etc.

## 10.9 Estimativa de incertezas

Não podemos eliminar completamente a presença de incertezas em procedimentos experimentais. No entanto, a teoria de erros nos permite fazer uma estimativas dos erros cometidos no experimento de modo a podermos avaliar a precisão e a qualidade do experimento realizado. Assumindo que os erros ocorrem devido a fontes independentes de incertezas no experimento, podemos tomar como erro total de uma medida a soma dos erros sistemáticos, de escalas e aleatórios. O tratamento para cada tipo de erro ocorre como abaixo.

- **Erros sistemáticos:** Quanto aos erros sistemáticos, suspeitando-se que sua presença é relevante para os resultados obtidos, tentamos identificar sua origem e eliminá-lo do experimento. Não estimaremos aqui esse tipo de erro.

Dessa forma, desprezando erros sistemáticos, exprimiremos o erro total sobre um resultado experimental como

$$\Delta m = \sigma_e + \sigma_a \quad (38)$$

onde  $\sigma_e$  denota o erro de escala associado á medida e  $\sigma_a$  seu o erro aleatório provável. Esses erros podem ser estimados da seguinte maneira:

- **Erro de escala em instrumentos analógicos:** O limite de erro de calibração de um instrumento analógico, em geral, coincide com a menor divisão indicada pelo instrumento. O erro de escala pode ser adotado como metade do limite de erro de calibração, ou seja, metade da menor divisão da escala

$$\sigma_e = \pm \frac{\text{Menor Divisão da Escala}}{2} = \pm \frac{\text{MDE}}{2}. \quad (39)$$

Exemplo: Para o caso de uma régua graduada em milímetros, temos  $\sigma_e = \pm 0,5\ \text{mm}$ .

- **Erro de escala em instrumentos digitais:** Neste caso o manual do instrumento fornece o erro de escala como sendo a exatidão ou acurácia do instrumento. Nos casos em que esta informação não esta disponível adota-se o erro de escala como sendo igual a uma unidade da menor divisao da escala (1 no último algarismo mostrado)

$$\sigma_e = \pm \text{Acurácia ou } \pm \text{Menor Divisão da Escala} \quad (40)$$

Exemplo 1. Para o caso de um cronômetro com precisão em milisegundos, temos  $\sigma_e = \pm 1\ \text{ms}$ .

Exemplo 2. Para o caso de um multímetro digital cujo manual informa que na escala de 2 mA a acurácia é  $\pm 0,8\%$  da leitura + 3 dígitos: o dígito é uma unidade da menor divisão mostrada na escala considerada, que no caso é 0,001 mA ( $1\ \mu\text{A}$ ); se a leitura no multímetro é 1,101 mA

$$\Rightarrow 0,8\% + 3\ \text{dígitos} = (0,008808 + 3 * 0,001)\ \text{mA} = 0,011808\ \text{mA}$$

$$\sigma_e = \pm 0,01\ \text{mA}. \quad (41)$$

- **Estimativa do erro aleatório provável:** Para o cálculo do erro aleatório provável fazemos um conjunto de  $N$  medidas da quantidade física e prosseguimos através dos seguintes passos:

1. Calcula-se o valor médio (valor mais provável de uma medida) através da média aritmética dos valores  $x_i$  medidos

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \quad (42)$$

2. Calcula-se o desvio  $\Delta x_i$  de cada medida em relação à média

$$\Delta x_i = x_i - x_m. \quad (43)$$

3. Calcula-se o desvio padrão  $\sigma$ , o qual é uma das quantidades em estatística para indicar a tendência das medidas se distribuírem em torno do seu valor mais provável. O valor de  $\sigma$  nos fornece uma idéia da dispersão das medidas em relação a seu valor mais provável, sendo dado por

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}{N - 1}}. \quad (44)$$

4. Finalmente, o erro aleatório será dado calculando-se o desvio padrão da média

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (45)$$

## 10.10 Propagação de erros

Como podemos fazer operações matemáticas com resultados de medidas escritas como  $(x \pm \Delta x)$ ? Como erros  $\Delta x$  se propagam para o resultado da operação quando, por exemplo, multiplicamos duas medidas  $(x_1 \pm \Delta x_1) \times (x_2 \pm \Delta x_2)$ ? Para resolver esse tipo de problema, nós podemos fazer uso do cálculo de variações. Assumindo que a operação que queremos realizar atue em  $p$  diferentes medidas  $(x_1, \dots, x_p)$ , procuraremos o erro associado à função  $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ , onde  $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$  é o resultado da operação a ser feita. Por exemplo, para multiplicarmos duas medidas  $x_1$  e  $x_2$ , consideramos a função que é o resultado da multiplicação de  $x_1$  e  $x_2$ , ou seja,  $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ . O erro associado a essa multiplicação (ou a

uma função mais geral) pode ser calculado através de

$$\Delta f(x_1, \dots, x_p) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_p} \right| \Delta x_p. \quad (46)$$

**Exemplo:** Para o caso da multiplicação de  $x_1$  e  $x_2$  discutida acima, obtemos

$$\Delta f(x_1, x_2) = x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2, \quad (47)$$

escrevendo o resultado final da operação como

$$(x_1 \pm \Delta x_1) \times (x_2 \pm \Delta x_2) = (x_1 \cdot x_2) \pm (x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2) \quad (48)$$

**Exercícios:** Calcule  $\Delta f$  para cada um dos casos mostrados abaixo.

- Soma:  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ .
- Subtração:  $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ .
- Divisão:  $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$ .
- Potenciação:  $f(x_1) = x_1^n$ , onde  $n$  é um número natural.

## Referências

1. VUOLO, J. H., *Fundamentos da teoria dos Erros*, Ed. Edgard Blucher Ltda, São Paulo (1995).
2. PIACENTINI J. J, GRANDI, B. C. S., HOFMANN, M. P., LIMA F. R. R., ZIMMERMANN E., *Introdução ao Laboratório de Física*, Ed. da UFSC, 2a. Edição Revisada, Florianópolis (2005).

## 11 APÊNDICE II: Método dos Mínimos Quadrados

### Escala dos eixos

#### 11.1 Construção de gráficos

Um gráfico apresenta um conjunto, ou mais, de dados experimentais numa figura. O gráfico objetiva mostrar visualmente a dependência entre uma grandeza e um parâmetro medidos simultaneamente. Para isto o gráfico deve ter os elementos essenciais abaixo.

Fornece a escala em que a grandeza é representada no eixo graduado. O eixo possui uma graduação principal, podendo também possuir uma graduação secundária, sendo que apenas para a principal é colocado o texto de legenda da escala. As legendas da escala devem ser números redondos, preferencialmente, múltiplos de 2 ou 5.

#### Título do gráfico

Informa quais dados e que dependência está sendo representada. Por exemplo, se quer-se estudar a dependência da velocidade com o tempo o título pode ser de ser de uma das formas abaixo.

- Gráfico: velocidade ( $v$ ) em função do tempo ( $t$ )
- Gráfico:  $v$  versus  $t$
- Gráfico:  $v(t)$

#### Legenda do gráfico

Quando mais de um conjunto de pontos é representado num único gráfico, é necessário diferenciar os conjuntos de dados usando símbolos diferentes. A legenda é um quadro inserido no gráfico onde se coloca o símbolo ao lado de um texto curto que especifica qual conjunto de dados aquele símbolo representa.

#### Títulos dos eixos

Especifica qual grandeza física o eixo representa e que unidade é utilizada na escala do eixo. O eixo vertical, das ordenadas, corresponde à grandeza que é especificada primeiro na título do gráfico, antes do “versus”, enquanto que o que vem depois é representado no eixo horizontal, das abcissas. Assim, por exemplo, quando se construir o gráfico de “ $v$  versus  $t$ ”, as velocidades devem ser lidas nas escala do eixo vertical e os tempos no eixo horizontal. No título do eixo deve-se utilizar um símbolo adequado para a grandeza enquanto que a unidade é informada em parêntesis ou com um separador “/” conforme os exemplos:

- $v (cm/s)$  ou  $v (cm s^{-1})$  ou  $v / cm s^{-1}$
- $t (s)$  ou  $t / s$

- Atenção: É errado colocar os valores dos pontos experimentais como legendas nos eixos.

#### Estética

Um gráfico é uma figura, portanto, deve ser bem proporcionado e esteticamente agradável para facilitar sua observação e análise. Por exemplo, um gráfico achatado, assim como uma escala inadequada, dificulta a análise das dependências matemáticas.

Figura 1.

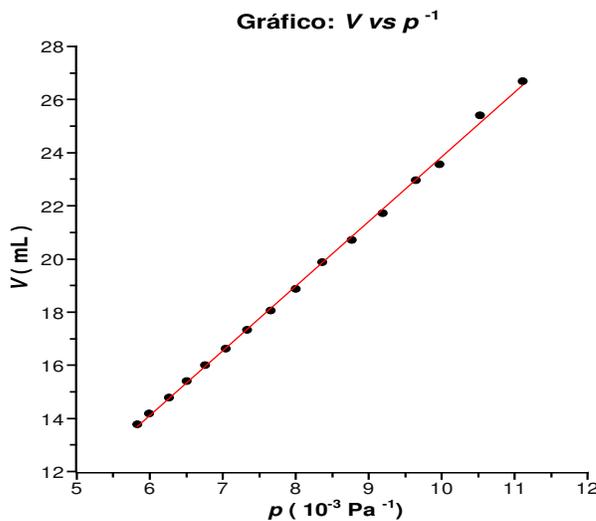


Figura 2.

## 11.2 Análise de gráficos: ajuste linear

Seja um experimento que fornece como resultado um conjunto de  $N$  pares de medidas  $(X_i, Y_i)$  que graficamente representados geram uma reta. O ajuste linear é a análise matemática de dados que apresentam uma dependência linear

$$Y = a + bX,$$

para a obtenção dos coeficientes linear  $a$  e do coeficiente angular  $b$ . Apresentaremos abaixo um exemplo que analisaremos primeiro pelo método da triangulação e depois pelo método dos mínimos quadrados.

### Método da triangulação

O método da triangulação consiste em traçar um triângulo retângulo com a hipotenusa apoiada sobre a melhor reta que passa pelos pontos experimentais. Esta melhor reta é escolhida “a olho” de modo que os pontos se distribuam de forma igual acima e abaixo da reta.

O coeficiente angular  $b$  é determinado pela razão

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_{final} - Y_{inicial}}{X_{final} - X_{inicial}}.$$

A figura 2 ilustra um exemplo de aplicação do método. Note que triângulo retângulo escolhido deve ser relativamente grande para diminuir a incerteza em  $\Delta F$  e  $\Delta L$ . O coeficiente linear  $a = 1 \text{ mN}$  foi encontrado extrapolando a reta até  $L = 0$ . Já o coeficiente angular foi calculado como

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{(50-20)\text{mN}}{94-18\text{mm}} = 0,53\text{Nmm}^{-1}.$$

Chamamos a atenção para o fato de que tanto  $a$  como  $b$  podem ser positivos ou negativos e ambos possuem unidades. Também é importante notar que o coeficiente angular não é uma tangente pois possui unidade.

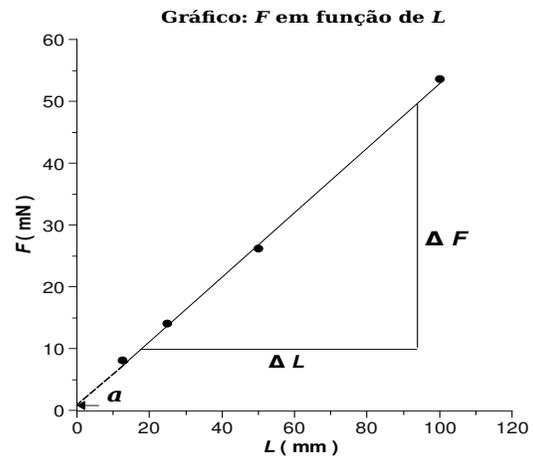


Figura 3.

### Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados resulta da minimização do quadrado da distância entre os valores experimentais de  $Y$  e os valores calculados como  $Y' = a + bX$ .

O coeficiente linear  $a$  e o coeficiente angular  $b$  são fornecidos pelas equações

Tabela 8: Cálculo do método dos mínimos quadrados para dados do comprimento e da força magnética sobre um fio com  $I = 5$  A.

	X	Y	$X^2$	XY	$(a + bX)$	$\Delta Y^2$
$n$	$L(\text{mm})$	$F$ (mN)				
1	12,5	8,0	156,25	100	7,5	0,25
2	25,0	14,0	625	350	14	0,00
3	50,0	26,2	2500	1310	27	0,64
4	100	53,6	10000	5360	53	0,36
$\Sigma$	187,5	101,8	13281,25	7120		1,26

$$a = \frac{\sum Y \sum X^2 - \sum X \sum XY}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}; e \quad (49)$$

$$b = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad (50)$$

Tabela 9: Resultado dos ajustes lineares pelos métodos da triangulação e dos mínimos quadrados.

As incertezas de  $a$  e  $b$  são, respectivamente,

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum X^2}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}} \text{ e}$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{N \sigma^2}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}},$$

onde

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\Delta Y)^2}{N-2},$$

e  $\Delta Y$  é a diferença entre os valores experimental e teórico

$$\Delta Y = Y - (a + bX).$$

Na Tabela 1 o método dos mínimos quadrados (MMQ) é aplicado aos dados do exemplo da Figura 3. A aplicação das fórmulas acima leva aos valores dos coeficientes da reta e suas incertezas mostrados na Tabela 2. A Tabela 2 mostra também os resultados obtidos com o método da triangulação e notamos que ambos os métodos concordam dentro da incerteza calculada.

	MMQ	Triangulação
$a$ ( mN )	$1,0 \pm 0,7$	1
$b$ ( Nm <sup>-1</sup> )	$0,52 \pm 0,01$	0,53